LESTRAT Maxime , REULIER Maxence, OLLIVIER Emma

Encadré par : nos professeurs de physique, LEMEIGNEN et KOCH

LE RETOUR AU CALME DU DOUBLE PENDULE

Lycée Joachim du Bellay, Académie de Nantes

SOMMAIRE

Résumé

Dans notre mémoire, nous allons vous présenter un sujet dont nous avons déjà commencé à traiter lors des TPE en première. Nous avons travaillé sur la théorie du chaos, plus précisément dans le thème de la météorologie. Nous avons décidé de garder pour les Olympiades de physique seulement le double pendule et son système chaotique.

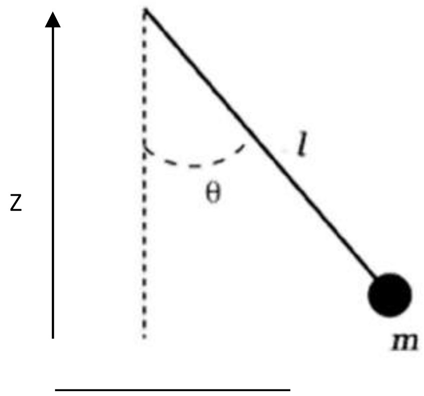
Initialement, le chaos représentait l'inconnu. Il représentait des visions effrayantes qui reflétaient la crainte de l'Homme face à l'incontrôlable. Aujourd'hui, la théorie du chaos représente un domaine en plein développement, qui implique l'étude des phénomènes manifestant une dépendance aux conditions initiales.

Le double pendule, est un système déterministe, qui est un système imprévisible. Nous verrons par la suite que de faibles variations dans les conditions initiales provoquent des changements conséquents dans l'évolution de ce système.

Ainsi, nous nous demanderons comment nous pourrons modéliser les différents régimes du double pendule.

Théorie : Le pendule simple

Pour comprendre au mieux le double pendule, nous allons étudier tout d'abord le pendule simple. Un pendule simple est composé d'une masse m, au bout d'une liaison de longueur l. Le pendule est soumis à la gravité, notée g. Lorsque l'on écarte le pendule de sa verticale puis qu'on le lâche, l'effet du poids ramène constamment le pendule vers sa position d'équilibre.



Variables :

Θ : angle en radians

L : longueur du fil en mètres

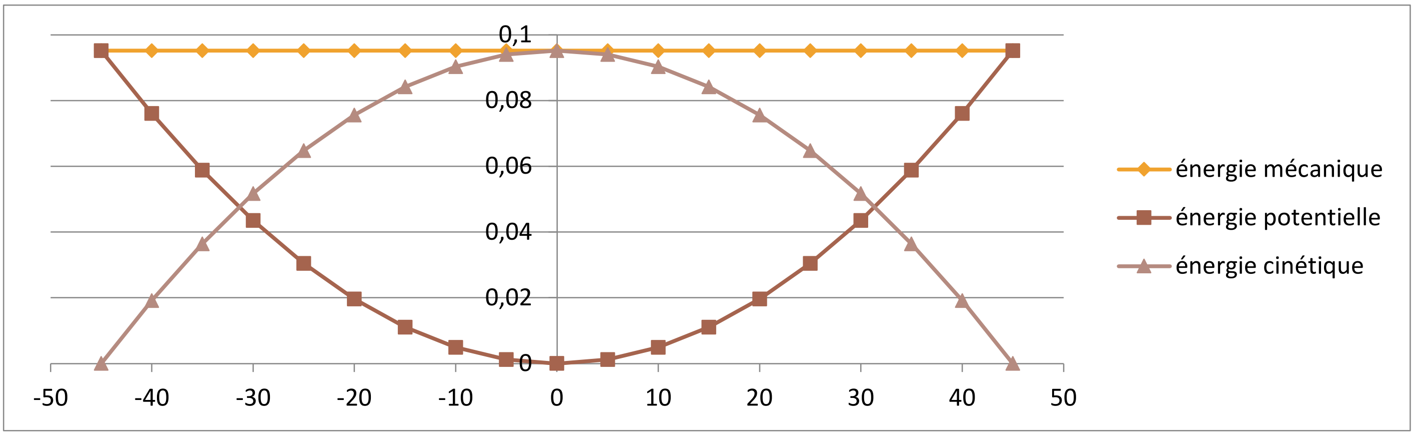
Z : altitude en mètres

M : masse en kg

Nous allons procéder à une étude énergétique du pendule. Le pendule est soumis à trois énergies :

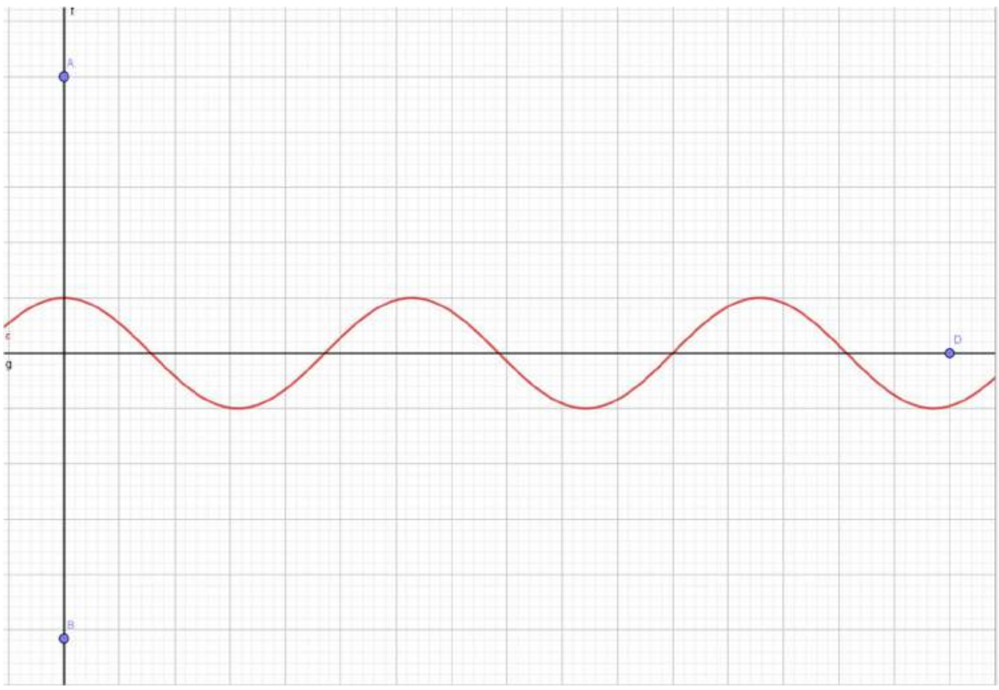
- L'énergie cinétique : Ec= ½.m.v^2
- L'énergie potentielle de pesanteur : Epp= m.g.z
- L'énergie mécanique : Em= Ec+Epp

Dans le but d'observer les variations d'énergie en fonction de l'angle, nous avons simulé un pendule simple sur un tableur Excel. Nous avons calculé l'énergie mécanique avec la formule suivante : Em = l(1-cos(θ)) avec l (0, 325 m) et θ_{max} (-45° soit -0,7854 radian). Puis l'énergie potentielle de pesanteur avec la formule suivante : Epp = l(1-cos(θ)) avec l (0,325 m) et θ variant de -45° à 45° avec un pas de 5° convertit en radians (*π/180). Pour finir nous avons calculé l'énergie cinétique en soustrayant l'énergie potentielle à l'énergie mécanique : Ec = Em – Epp. Voilà la courbe que nous avons obtenu :



Pour trouver la valeur de Z, il faut connaître la longueur du pendule et son angle au moment auquel on veut calculer son altitude. Son altitude est égale à la longueur du pendule (l) moins le côté adjacent à l'angle θ dans le triangle rectangle d'hypoténuse l. L'altitude Z se calcule donc avec la formule suivante : Z = l – l*cos(θ) = l* (1 – cos(θ)). L'énergie potentielle de pesanteur est donc égale à m*g*Z = m*g*(l*(1-cos(θ))).

La fonction cosinus est un système périodique, traduisant le système du pendule :



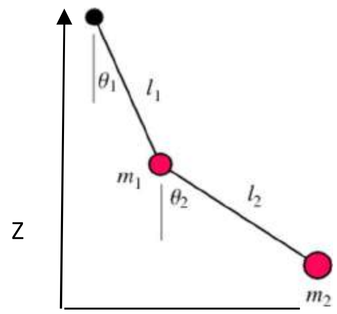
(Fonction cosinus réalisée grâce à Géogébra)

Théorie : Le double pendule

Le pendule double se différencie du simple par son deuxième pendule attaché au premier au niveau de la masse m_1. Il est lui aussi constitué d'une longueur que l'on nommera l_2, d'une masse m_2 et d'un angle θ_2 (différence entre la verticale et le pendule).

Nous avons donc plusieurs variables qui auront une influence sur les énergies du pendule double :

- Les angles θ_1 et θ_2 en radians (360° = 2π radians)
- Les longueurs l_1 et l_2 en mètres
- Les masses m_1 et m_2 en kg



Pour calculer l'énergie cinétique du pendule double, nous aurons besoin de connaître les vitesses angulaires aux angles θ1 et θ2 :

- Notés ω_1 et ω_2 en radians/secondes

Les équations pour trouver les énergies présentent dans le double pendule sont plus complexes car le second pendule aura une influence sur le mouvement du premier et inversement. En effet le premier pendule peut être freiné par le second lorsqu'il est relâché et accéléré lorsque le second pendule à une vitesse supérieure au premier. Voici les équations correspondant aux énergies trouvées sur Wikipédia :

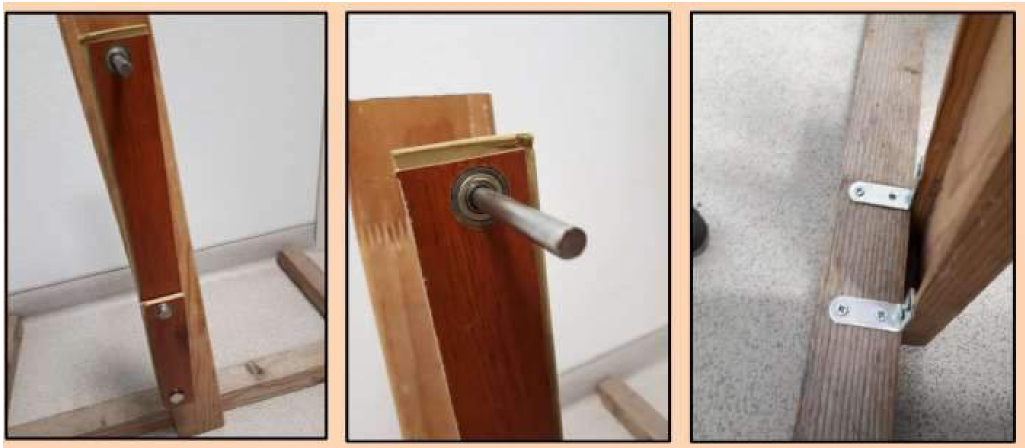
- Energie cinétique : $Ec = 1/2m_1l_1^2\omega_1^2+1/2m_2(l_1^2\omega_2^2+l_2^2\omega_2^2+2l_1l_2\omega_1\omega_2\cos(\theta_1- \theta_2))$
- Energie potentielle de pesanteur : $Epp = -(m_1+m_2)gl_1\cos(\theta_1)-m_2gl_2\cos(\theta_2)$
- Energie mécanique : Em = Ec + Epp

Energie cinétique correspond à la vitesse de la masse m_1 additionnée à celle de la masse m_2, L'énergie potentielle de pesanteur correspond à la l'énergie liée à l'altitude des deux masses et l'énergie mécanique à l'addition de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur.

Pour observer théoriquement le mouvement du pendule double et son aspect chaotique, nous avons effectué une simulation en langage python qui permet d'obtenir des représentations des différences entre les vitesses angulaires d'un angle B d'un premier pendule double et d'un angle B d'un second pendule double. Nous avons choisi de représenter les vitesses angulaires des angles B car elles sont très représentatives d'un mouvement chaotique

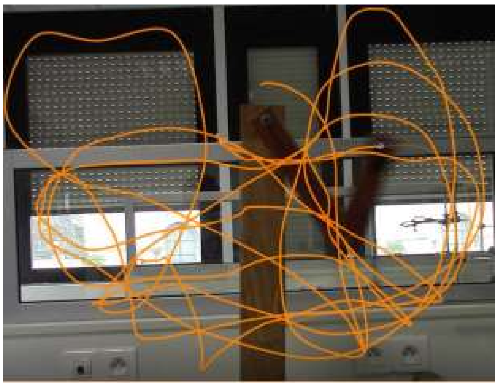
<u>Le double pendule</u>

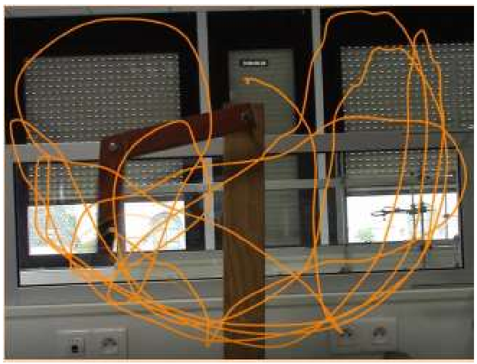
Nous avons décidé de réaliser notre propre double pendule avec du bois et des roulements à billes.



Ensuite, nous avons réalisé plusieurs vidéos avec les mêmes angles initiaux téta 1 et téta 2 pour pouvoir mettre en évidence l'aspect chaotique du double pendule. A l'aide du logiciel Kinovea, nous avons retracé numériquement la trajectoire de quatre lancers pour ainsi montrer cet aspect chaotique.

θ 1= 180° et θ 2=0°

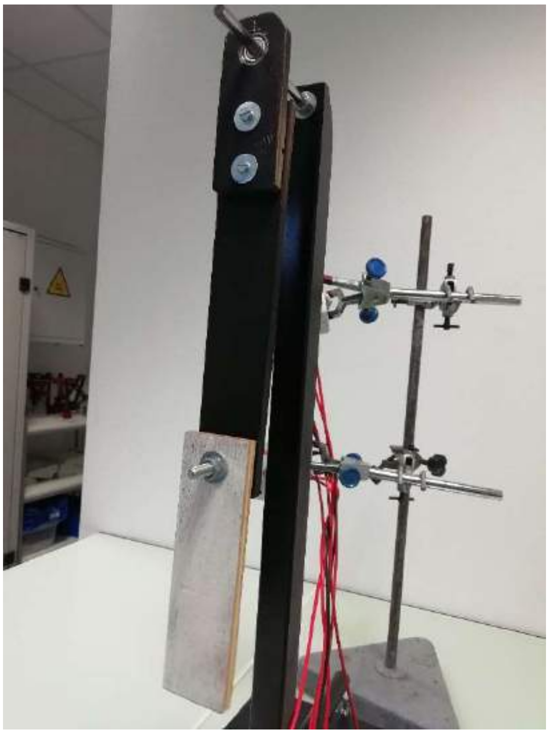




Nous pouvons observer qu'au cours de cette expérience, les trajectoires sont différentes selon les lancers malgré des angles de lancement très similaires.

Ensuite, nous avons effectué plusieurs mesures avec des conditions initiales différentes en changeant les angles téta 1 et téta 2. En le lâchant, il quitte sa position initiale pour entamer sa trajectoire.

<u>Les différents régimes du double pendule</u>

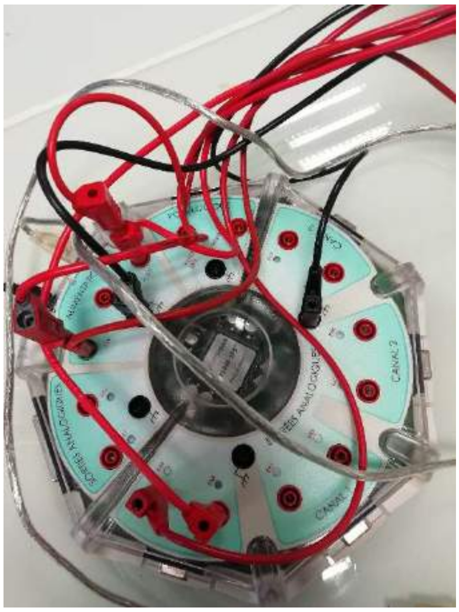


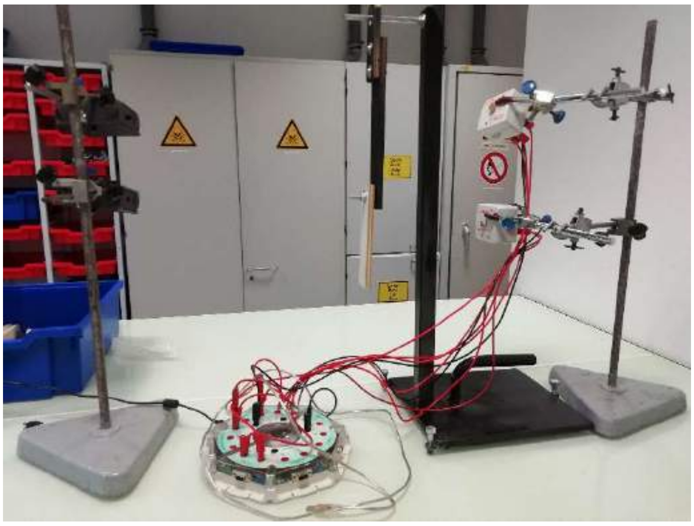
Ceci est le double pendule. Il est constitué de 2 planches de bois, reliées par des boulons et des roulements à billes pour minimiser les frottements. Ces branches sont suspendues à une barre en fer qui est fixée sur une potence.

Nous avons décidé d'utiliser 2 lasers afin de capter le mouvement du pendule. Le laser du haut permet de capter le mouvement du haut du pendule, et celui du bas le bas du pendule. Ces lasers sont maintenus grâce à une potence.

Ces capteurs captent les faisceaux des lasers pour que l'on puisse suivre l'évolution du mouvement du pendule au cours du temps.

Ceci permet de relier les informations captées lors du passage de pendule pour pouvoir les retranscrire sur l'ordinateur.





Ainsi, voici notre montage.

Pour commencer nous avons lancé le double pendule. Nous avons observé sa course et après plusieurs lancés nous avons pu noter que le double pendule passe par plusieurs phases, une première phase que l'on peut qualifier de chaotique, le régime transitoire et une deuxième qu'on peut qualifier de « calme », le régime stationnaire.

Après avoir lancé le double pendule en écartant d'un certain angle, nous avons remarqué qu'en effectuant son mouvement il crée une perturbation devant les lasers et coupe le signal qu'ils envoient aux récepteurs. Nous avons donc branché ces récepteurs à un ordinateur et lancé le logiciel Latispro, qui traduit le passage du pendule face aux lasers par les courbes.

Nous avons récupéré chaque relevé de lancers sur le logiciel et pris des mesures pour savoir à partir de quel moment le signal devient régulier et nous avons pu l'associer au point de stabilité du double pendule.

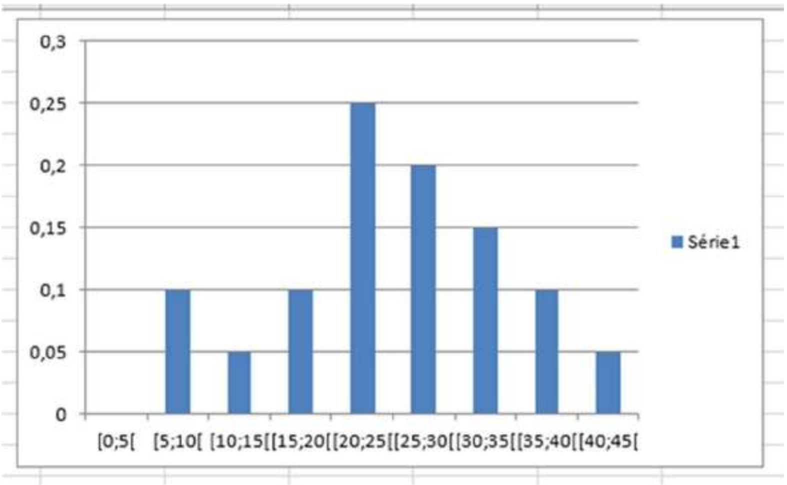
Nous avons donc pris plusieurs mesures pour un angle A de 180° par exemple, autrement dit nous l'avons mis à la verticale, le bras numéro 1 vers le haut et le bras numéro 2 vers le bas :

	A	B	C	D
1	1	20	1,213	
2	2	19,5	1,115	
3	3	22,8	1,207	
4	4	25,6	1,034	
5	5	32,7	0,919	
6	6	19,9	1,207	
7	7	11,5	1,219	
8	8	32,1	0,747	
9	9	27,5	1,034	
10	10	9,8	1,264	
11	11	20,5	1,092	
12	12	31,4	1,149	
13	13	5,3	1,264	
14	14	28,8	1,092	
15	15	29,1	1,092	
16	16	36,3	0,977	
17	17	22,6	1,034	
18	18	20,2	1,149	
19	19	39,4	0,919	
20	20	41,8	1,034	
21				
22				

Nous pouvons voir ci-dessus les 20 lancers que nous avons réalisé dans le but d'observer une régularité à travers l'expérimentation.

Dans certains lancés (Colonne B) on voit que le double pendule met des temps totalement différents pour arriver à un régime stationnaire. On peut voir ici que le double pendule peut mettre 5,3 secondes à arriver comme 41,8 secondes. Ce schéma est donc instable, nous ne pouvons pas absolument affirmer un temps précis qu'il mettra pour arriver à un régime stationnaire mais nous pouvons donner une fourchette d'incertitude dans lequel se trouvera probablement le temps que mettra le double pendule pour sortir de sa phase chaotique.

Dans chaque lancers (Colonne C), dès que le pendule passe à un régime stationnaire, nous avons mesurer le temps d’une période entre deux passages devant le laser.



On voit donc dans le graphique ci-dessus que la majorité des régimes stationnaires arrivent entre 20 et 25 secondes et que ça ne commence qu'après 5 secondes à sortir de la phase chaotique.

Dans cet histogramme on voit aussi que le passage entre la phase 1 et la phase 2 est un schéma assez régulier car on peut voir un pique descendant au fur et à mesure que le temps passe.

	A	B	C	D	E	F
1	T	Ecart-type	temps	téta 1	téta 2	téta 1 - téta 2
2	1,04	1,2	25,4	180	0	180
3	1,001	1,57	21,3	90	0	90
4	0,79	1,46	17,5	40	0	40
5	1,04	4,7	19,54	70	0	70

Ainsi, voici quelques-uns de nos résultats. Nous pouvons constatez que moins l'angle θ est grand, et moins le temps pour arriver à un régime stationnaire sera grand. Cela s'explique par le fait que le double pendule à plus d'énergie lorsqu'il est lâché à un angle grand alors que s'il est lâché à un angle petit, il aura moins d'énergie et donc il s'arrêtera plus vite. De plus, le pendule est soumis aux frottements ce qui le ralenti pour arriver à un stade plus stable.

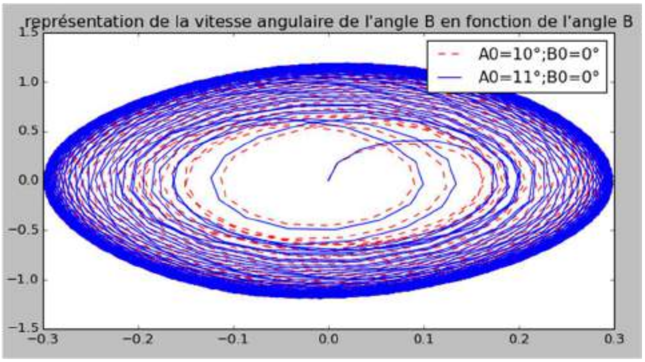
Le pendule a un mouvement régulier, il bouge de gauche à droite périodiquement. Le double pendule quant à lui a un mouvement assez désordonné au départ et finit par arriver dans une phase de stabilité. Lors du mouvement du double pendule les deux bras ont un mouvement influant l'un sur l'autre.

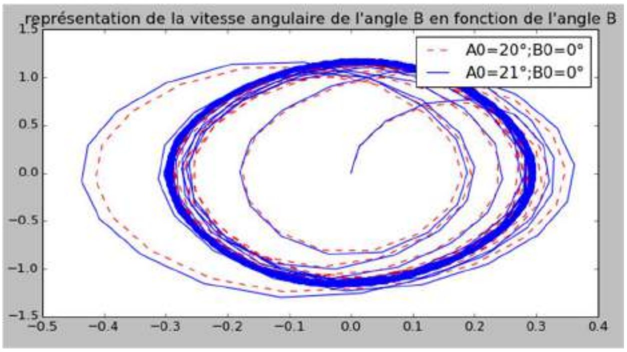
Lorsque le premier bras bouge périodiquement, le deuxième bras va venir perturber son mouvement. Les énergies cinétique et potentielle ont un rôle important là-dedans : lorsque le premier bras bouge normalement, le deuxième prend de la vitesse en descendant et en perd en remontant. Cependant, lorsque le deuxième bras va redescendre, il va freiner le premier qui avait un mouvement stable et va le faire partir dans l'autre sens. Ainsi, le double pendule va arrêter de bouger plus vite à cause du premier et le deuxième qui se freinent mutuellement, n'ayant pas le même trajet ainsi que la même vitesse.

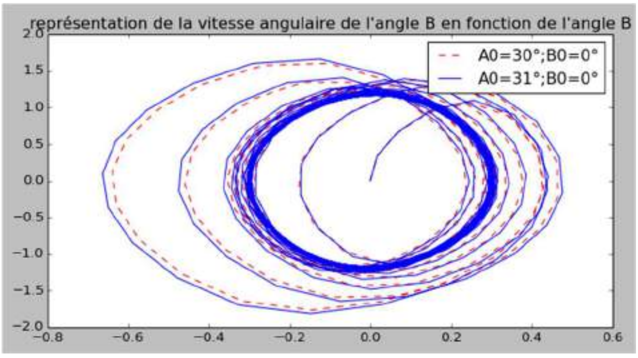
Nous pouvons associer ce mouvement au mouvement de l'effet papillon : lorsque le pendule freine, il va partir d'un côté et lorsque qu'il reprend de la vitesse il part autre part. Son mouvement peut donc être dessiné et forme donc le même schéma que l'effet papillon.

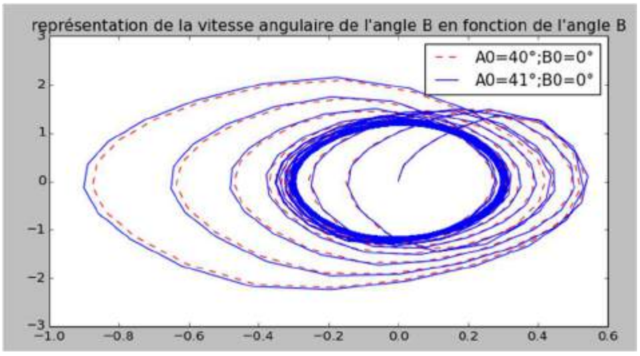
Algorithme

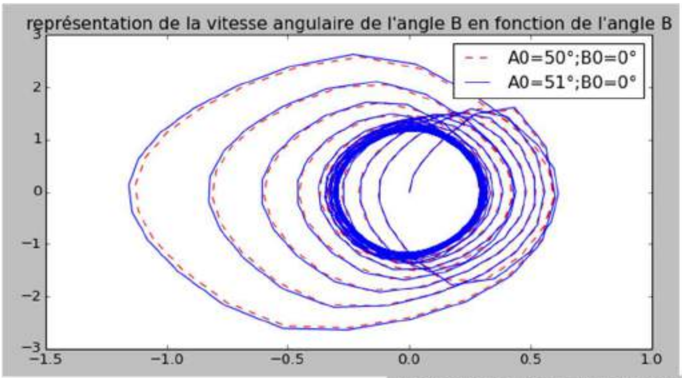
Nous avons effectué différentes simulations avec des conditions initiales différentes : nous avons essayé avec des angles B initiaux de 10° et 11° puis de 20° et 21° et ainsi de suite jusqu'à 180° et 181°. Nous avons ensuite analysé les représentations en leurs accordant un aspect chaotique ou non. Voici quelques représentations :

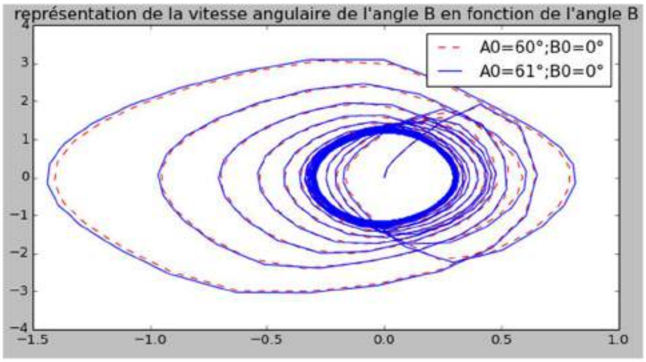


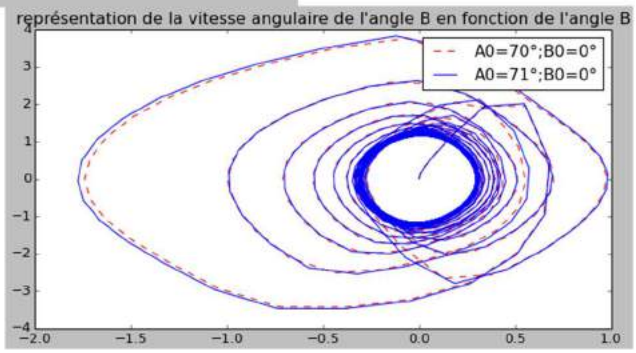


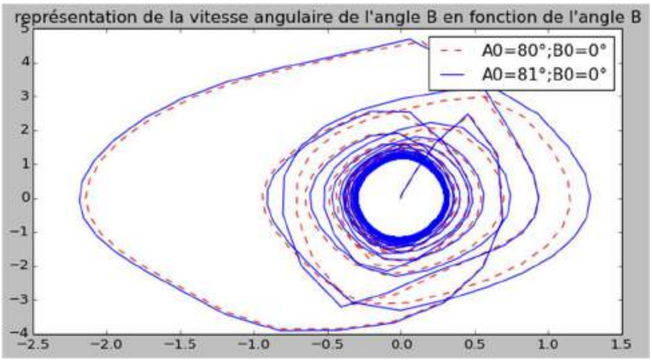


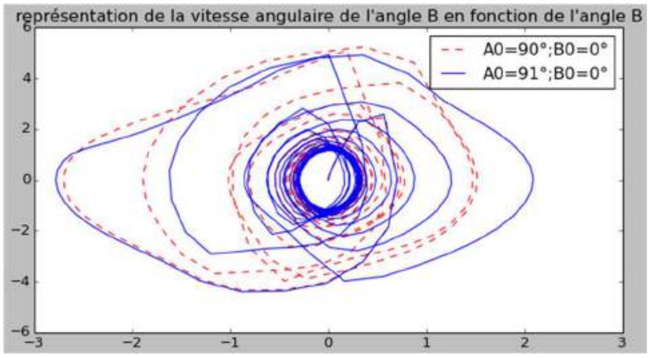


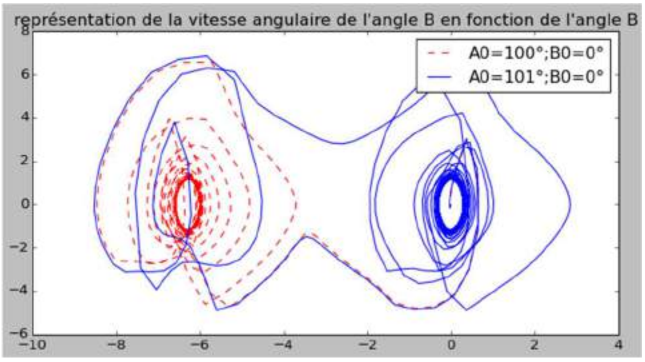


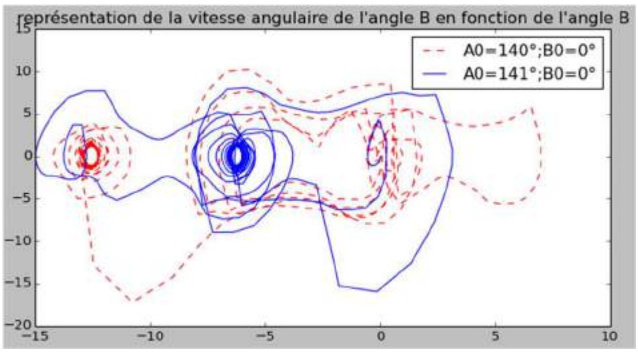


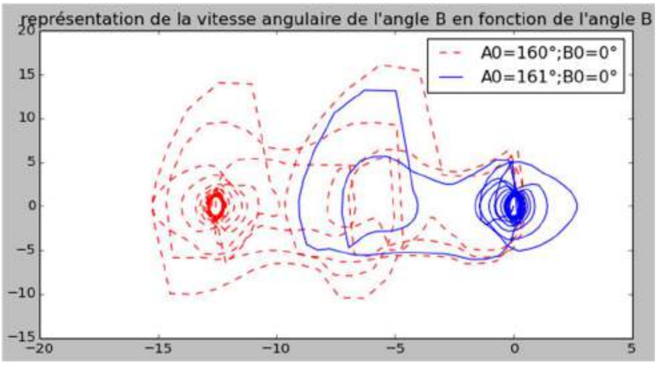


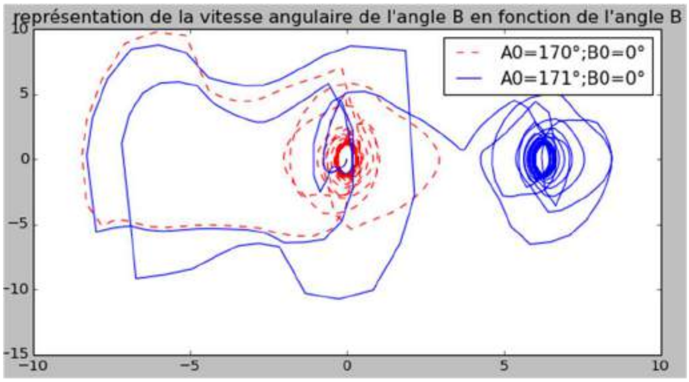






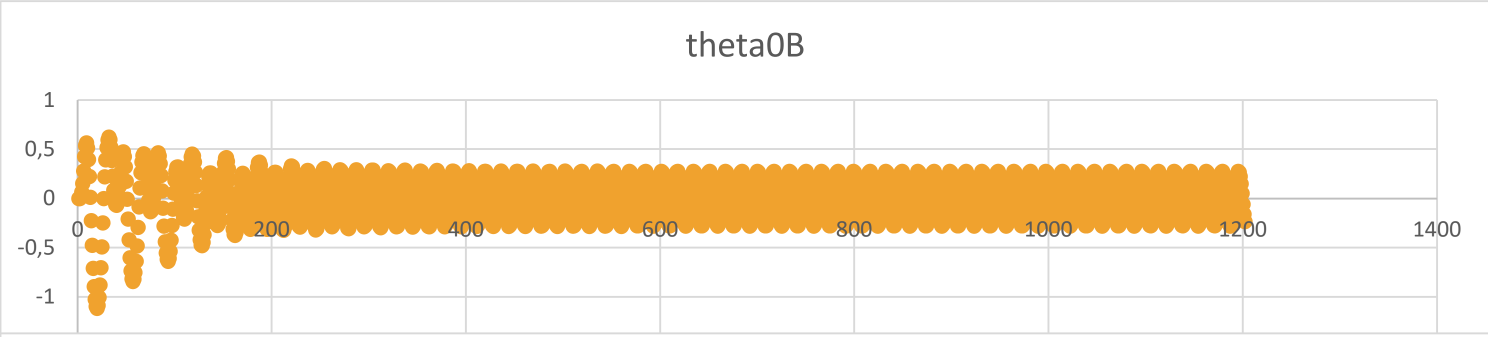


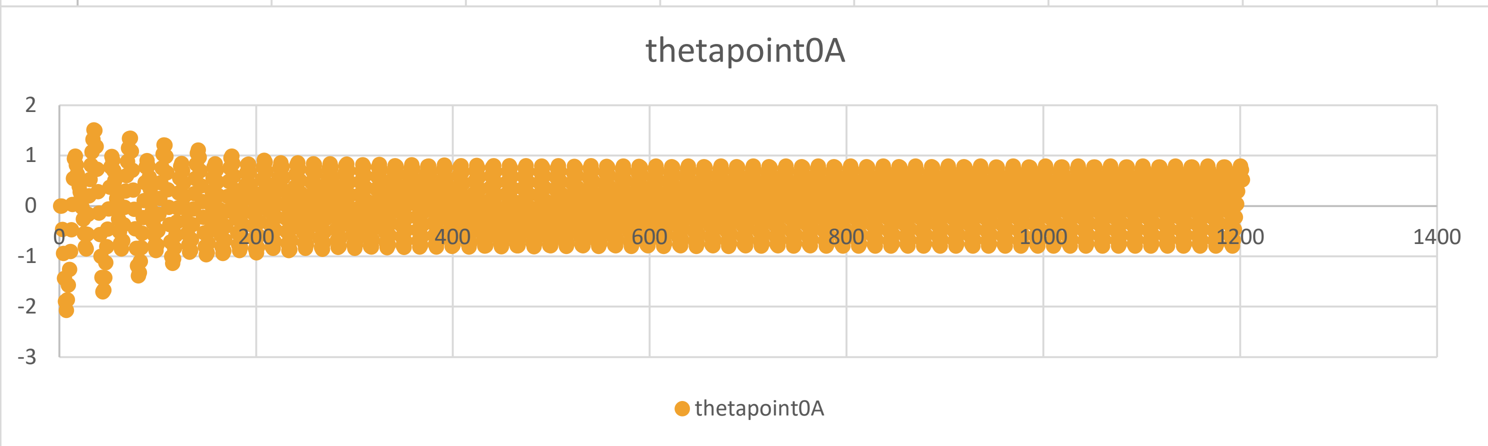


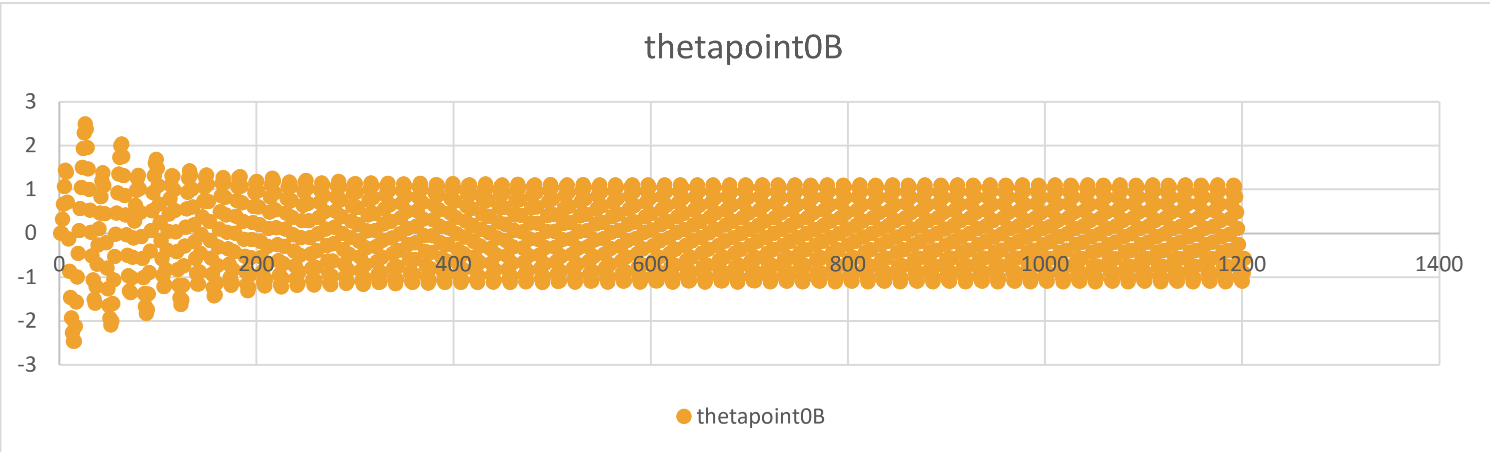


On peut constater qu'à partir d'un angle A de 80°, une différence d'un seul degrés de l'angle initial a un impact important sur le mouvement du pendule. Cette importance est liée aux caractéristiques chaotiques du pendule. On remarque aussi que plus l'angle A initial est grand, plus une différence dans les conditions initiales aura d'impact sur les différences des mouvements des deux pendules. La simulation python que nous avons faite n'a pas réussi à faire une représentation pour certains angles (110°, 120°, 130°, 150°, 180°). Cela est peut-être lié à une trop grande différence des deux vitesses angulaires.

Pour montrer qu'il existe une certaine régularité dans le chaos nous avons étudié l'évolution des angles A et B et des vitesses angulaires A et B pour un angle A initial de 45° à l'aide d'un tableur Excel. Nous avons observé qu'à partir d'un certain temps, les angles et les vitesses angulaires deviennent régulières. Voici quelques graphiques présentant ce phénomène :







Dans ces quatre graphiques, les angles et les vitesses angulaires deviennent réguliers autour de 20 secondes. En effet, l'abscisse correspond au temps en dixièmes de secondes et l'ordonnée à l'angle en radian pour les angles et à la vitesse en radians par seconde (une vitesse positive correspond à une rotation inverse au sens des aiguilles d'un montre et une vitesse négative à une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre). Nous pouvons donc conclure que le chaos n'empêche pas une régularité au bout d'un certain temps.

Sortie à Polytech

Dans le but d'approfondir nos connaissances, nous sommes allés à l'école polytechnique de Nantes. Nous avons présenté notre projet à M. Rupil, puis il nous a donné quelques idées pour avancer dans notre projet.

De plus, les élèves de cette école avaient déjà travaillé sur le double pendule au cours d'un TP. L'image ci-dessus nous présente ainsi le double pendule, accroché au mur.

Conclusion

Nous avons essayé de comprendre au mieux la théorie du pendule simple pour pouvoir comprendre comment fonctionne le double pendule. Ainsi, nous avons pu voir que le pendule était soumis à des énergies. Ensuite, nous avons pu observer lors de nos expériences que le double pendule est un système dynamique et chaotique.

Le double pendule dépend des conditions initiales et est un système déterministe qui est imprévisible.

On en conclut donc que concernant le mouvement du double pendule : même si à vue d'œil il n'a pas l'air d'avoir un mouvement régulier, en fin de compte il forme quand même une boucle répétitive avec plusieurs phases distinctes qui se succèdent. D’une part, il y a le régime transitoire, et d’autre part un régime stationnaire, qui se traduit par un « retour au calme » du double pendule. Nous pouvons modéliser ces différents régimes en essayant de comprendre l’évolution du système du pendule par des expériences, en changeant quelques paramètres.

Nous aimerions poursuivre notre projet en essayant de faire « chanter » le double pendule. Ainsi, nous voulons mettre en œuvre les différents régimes qui émettrons un certain son lorsqu’il passera d’un régime transitoire à un régime stationnaire.